ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ОРТИМИЗАЦИИ»

СЕМЕСТР 2

Задача 9.1. Основываясь только на определении доказать, что функция $f(x) = \|x\|^2$ сильно выпукла на $\mathbf{R}^n$ с константой $\theta = 1$.

Задача 9.2. Используя теорему 7.6 доказать следствие теоремы 9.1 (неравенство Иенсена).

Задача 9.3. Доказать, что для любых чисел $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, справедливо

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i}\right) \geq m^2.$$

Задача 9.4. Привести примеры, показывающие, что квазивыпуклая на данном множестве функция не обязательно выпукла на этом множестве.

Задача 9.5. Доказать, что определение квазивыпуклости функции f на выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n \iff$ условию

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max\{f(x^1),\, f(x^2)\} \quad \forall\, x^1,\, x^2 \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,\, 1].$$

Задача 9.6. Доказать теорему 9.3.

Задача 9.7. Привести пример, показывающий, что условие неубывания функции φ в теореме 9.5 существенно.

Задача 9.8. Доказать теорему 9.6.

Задача 9.9. Доказать, что функция

$$f(x) = \{\max(e^x,\, x^2) + 1/x\}^2$$

выпукла на $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$.

Задача 9.10*. Пусть даны числа $\lambda_i \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Доказать, что так называемая *функция Кобба-Дугласа*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}, \quad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

(широко используемая в математической экономике), вогнута на $\mathbf{R}^n_+$.

Задача 9.11. Основываясь на теореме 9.7 доказать теорему 9.10.

Задача 9.12. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = (\alpha + 6)x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + x_2^2, \quad x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

выпукла на $\mathbf{R}^2$?

Задача 9.13. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + (\alpha + 2)x_3^2 + x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbf{R}^2,$$

выпукла на $\mathbf{R}^2$?

Задача 9.14*. Доказать, что функция

$$f(x) = \ln \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

выпукла на $\mathbf{R}^n$.

Задача 9.15. Доказать, что функция

$$f(x) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

выпукла на $\mathbf{R}^2$.

Задача 9.16*. Пусть X и Y — выпуклые множества в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно, $\varphi(x, y)$ — выпуклая функция на $X \times Y$, ограниченная снизу по y на Y при каждом фиксированном $x \in X$. Доказать, что функция $f(x) = \inf_{y \in Y} \varphi(x, y)$ выпукла на X.

Задача 9.17. Пусть φ — ограниченная сверху выпуклая функция на $\mathbf{R}_+$. Доказать, что φ не возрастает на $\mathbf{R}_+$.

Задача 9.18. Пусть f — непрерывная сильно выпуклая функция на замкнутом выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$. Доказать, что f — бесконечно растущая функция на X.

Задача 10.1. Доказать лемму 10.1.

Задача 10.2. Решить задачу

$$f(x) = 4x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 4 \leq x_1 \leq 8, \ -1 \leq x \leq 2\}.$$

Задача 10.3. Решить задачу

$$f(x) = \alpha x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 2 \leq x_1 \leq 3, \ 3 \leq x_2 \leq 4\},$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$ — параметр.

Задача 10.4. Найти все значения параметра $\alpha \in \mathbf{R}$, при которых точка $x^* = 0$ является решением задачи

$$f(x) = e^{\alpha^2 x_1} + e^{\alpha^2 x_2} + 2\alpha x_1 - x_2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \ -1 \leq x_2 \leq 0\}.$$

Задача 10.5*. Пусть функция f дифференцируема и выпукла на $\mathbf{R}^n$. Доказать, что $\forall$ числа $\lambda > 0$ решение системы уравнений $f'(x) = -\lambda x$ $\exists$ и !.

Задача 10.6. Решить задачу

$$f(x) = \ln x_1 - x_2 \to \max, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \geq 1,\ -x_1 + x_2 \leq 1,\ 2x_1 - x_2 \leq 3\}.$$

Задача 10.7. Решить задачу

$$f(x) = 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 \to \min,\ x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5\}.$$

Задача 10.8. Решить задачу

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_3 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 1,\ 2x_1 + x_2 \leq 10\}.$$

Задача 10.9. Решить задачу

$$f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 \to \max, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -x_1 + 2x_2 \leq 3,\ 3x_1 + x_2 \leq 5,\ 2x_1 + 3x_2 \geq 1\}.$$

Задача 10.10. Решить задачу

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to \max, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,\ x_j \geq 0,\ j = 1,\, \dots,\, 4\}.$$

Задача 10.11. Решить задачу

$$f(x) = x_1^3 - x_2^2 \to \max, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1x_2 \leq -1,\ -2 \leq x_1 \leq 0,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Задача 11.1. Решить задачу

$$f(x) = \max\{x_1^2 + x_2^2,\, x_1 + x_2 + 1\} \to \min, \quad x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Задача 11.2. Решить задачу

$$f(x) = \max\{x_1^2 + x_2,\, x_1 + x_2^2\} \to \min, \quad x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Задача 11.3. Решить задачу

$$f(x) = \max\{x^2,\, x^2 - 2x + \alpha\} \to \min, \quad x \in \mathbf{R},$$

$\alpha \in \mathbf{R}$.

Задача 11.4. Решить задачу

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \|x - c\| \to \min, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$c \in \mathbf{R}^n$.

Задача 11.5. Решить задачу

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + |\langle c,\, x\rangle + 1| \to \min, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$c \in \mathbf{R}^n$.

Задача 11.6. Найти точку в $\mathbf{R}$, сумма расстояний от которой до заданных точек $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$, минимальна.

Задача 11.7 (Штейнера)**.** Найти точку в $\mathbf{R}^2$, сумма расстояний от которой до вершин заданного треугольника минимальна.

Задача 13.1. Выдвигая из геометрических соображений гипотезу, а затем проверяя ее по теореме Куна–Таккера, решить задачу

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 - x_2 \le 0,\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1\}.$$

Задача 13.2. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ точка $x^* = (\sqrt{3}/2 + 1,\, 1/2)$ является решением задачи

$$\alpha x_1 + x_2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1,\ (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \le 1\}?$$

Задача 13.3. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbf{R}$ точка $x^* = (1,\, 1)$ является решением задачи

$$-x_1 + \alpha x_2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2,\ x_1^2 - x_2 \le 0\}?$$

Задача 13.4. Найти глобальное решение задачи

$$2x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}x_3^2 \to \max, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3 \le 4,\ x_1 - x_2 + x_3^2 \le 1\}.$$

Задача 13.5. Решить задачу

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2 \to \min, \quad x \in X,$$

$$X = \left\{ x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \right\},$$

где $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots, n$.